令和６年度創成科学研究科理工学専攻博士前期課程入学試験問題

数　学　２１

（一般入試）

（理工学専攻　機械科学コース）

（理工学専攻　光システムコース）

（注意事項）

1．問題冊子は，係員の指示があるまで開かないこと。
2．問題冊子は，この表紙を除いて 5 枚である。
3．問題冊子に，印刷不鮮明やページの落丁及び汚れ等に気づいた場合は，手を上げて試験監督者に申し出ること。
4．解答は，用紙の指定された番号の解答欄に書くこと。指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。
　　また，裏面に解答したものも採点しない。
5．解答開始後，用紙の所定欄に受験番号をはっきりと記入すること。
6．配付した用紙はすべて回収する。

受験番号	

数　学　21　その1

第1問　$f(x) = \dfrac{x^3}{3^x}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，n^3 と 3^n の大小を調べよ。必要であれば，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを用いてよい。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{f(x)}{x}dx$ を求めよ。

[第1問の解答箇所]

小計	点

受験番号	

数　学　21　その2

第2問　実数 a, k と未知数 x, y, z に対して，行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 6 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

とする。行列 A は正則ではないとし，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解をもつとする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) k の値を求めよ。

(3) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ。

(4) $\boldsymbol{b}$ は行列 A の固有ベクトルであることを証明せよ。

[第2問の解答箇所]

小計	点

受験番号	

数　学　21　その3

第3問　平面 π を $x+y-2z=0$ とする。ベクトル場 $\boldsymbol{a}(x,y,z)=z\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ を考える。ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x, y, z 軸の正の方向に向かう単位ベクトルとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$ を求めよ。

(2) 円柱 $x^2+z^2=1$ と平面 π の交線を C とする。線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。ただし，積分路 C の向きは点 $(0,-4,0)$ から見て時計回りに一周するものとする。

(3) 立体 $x^2+z^2 \leqq 1$ が平面 π と平面 $y=-4$ によって切り取られる部分を V とし，V の表面を S とする。ベクトル場 $\boldsymbol{b}(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ に対し，面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ。ここで $\boldsymbol{n}$ は S における外向きの単位法線ベクトルである。

[第3問の解答箇所]

小計	点

受験番号	

数　学　21　その4

第4問　以下の問いに答えよ。

(1) 複素平面上の原点を始点とし，i を終点とする線分を C とする。複素積分 $\displaystyle\int_C \cos z\,dz$ の値を求めて，その実部と虚部を求めよ。

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\,dz$ の値を求めよ。ただし，積分路は反時計回りに一周するものとする。

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{\cos z}\,dz$ の値を求めよ。ただし，積分路は反時計回りに一周するものとする。

[第4問の解答箇所]

小計	点

受験番号	

数　学　21　その5

第5問　微分方程式 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ の解を $y(x) = u(x)e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $a(x) = Q(x) - \dfrac{1}{2}P'(x) - \dfrac{1}{4}P(x)^2$ とする。$u = u(x)$ は微分方程式 $u'' + a(x)u = 0$ を満たすことを示せ。

(2) 微分方程式 $y'' + 2xy' + (x^2 + 3)y = 0$ の一般解を求めよ。

[第5問の解答箇所]

小計	点