

令和5年度創成科学研究科理工学専攻博士前期課程入学試験問題

数 学 2 1

(一般入試)

(理工学専攻 機械科学コース)

(理工学専攻 光システムコース)

(注意事項)

1. 問題冊子は、係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は、この表紙を除いて 5 枚である。
3. 問題冊子に、印刷不鮮明やページの落丁及び汚れ等に気づいた場合は、手を上げて試験監督者に申し出ること。
4. 解答は、用紙の指定された番号の解答欄に書くこと。指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。
また、裏面に解答したのも採点しない。
5. 解答開始後、用紙の所定欄に受験番号をはっきりと記入すること。
6. 配付した用紙はすべて回収する。

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 1

第 1 問 $f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ とする。自然数 n に対して、曲面 $z = f(x, y)$ $\left(\frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x \right)$ の面積を A_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $\frac{d}{dx} \left\{ x\sqrt{x^2+1} + \log \left| x + \sqrt{x^2+1} \right| \right\}$ を求めよ。

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

(3) A_n を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ を求めよ。

[第 1 問の解答箇所]

小 計	点
-----	---

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 2

第 2 問 3 次正方行列 A, B を $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) A が正則行列であることを示せ。また、逆行列 A^{-1} を求めよ。

(2) $XA = B$ を満たす行列 X を求めよ。

(3) $Ax = \lambda x$ を満たす $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (x, y, z は実数, $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$) が存在するような実数 λ をすべて求めよ。

[第 2 問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 3

第3問 半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ を S とする。 S の単位法線ベクトルで z 成分が正のものを n とする。ベクトル場 f, g を $f(x, y, z) = z^2i + x^2j + y^2k, g(x, y, z) = xi + yj + zk$ で定める。ただし, i, j, k は, それぞれ x, y, z 軸の正の方向に向かう単位ベクトルとする。

(1) n を求めよ。

(2) $\text{rot}(f \times g)$ を求めよ。

(3) 面積分 $\int_S f \cdot n \, dS$ を求めよ。

[第3問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 4

第 4 問 複素関数 $f(z) = z^2 - 2z - 3$ に対して、次の問いに答えよ。ただし、積分路は反時計回りに一周するものとする。また、 \bar{w} は複素数 w の共役複素数を表し、 $\operatorname{Re} w$ は w の実部を表す。

(1) $\int_{|z|=2} \frac{1}{f(z)} dz$ を求めよ。

(2) $\int_{|z|=2} \overline{f(z)} dz$ を求めよ。

(3) $\int_{|z|=2} \operatorname{Re} f(z) dz$ を求めよ。

[第 4 問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 5

第 5 問 $y = y(x)$ に関する微分方程式 $(*) y' - (6x^2 + 2)y + xy^2 = 3 - 6x - 9x^3$ を考える。

(1) $y = ax$ が $(*)$ を満たしているとき、実数 a を求めよ。

(2) u を x の関数とする。(1) で求めた a に対して、 $y = u + ax$ が $(*)$ を満たしているとき、 u が満たす微分方程式を求めよ。

(3) z を x の関数とする。 $u = \frac{1}{z}$ が (2) で得られた微分方程式を満たしているとき、 z が満たす微分方程式を求めよ。

(4) $(*)$ の解で $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ。

[第 5 問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--