

令和4年度創成科学研究科理工学専攻修士課程入学試験問題

数 学 2 1

(一般入試)

(機械科学コース)

(光システムコース)

(注意事項)

1. 問題冊子は、係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は、この表紙を除いて 5 枚である。
3. 問題冊子に、印刷不鮮明やページの落丁及び汚れ等に気づいた場合は、手を上げて試験監督者に申し出ること。
4. 解答は、用紙の指定された番号の解答欄に書くこと。指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。
また、裏面に解答したものも採点しない。
5. 解答開始後、用紙の所定欄に受験番号をはっきりと記入すること。
6. 配付した用紙はすべて回収する。

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 1

第 1 問 次の問いに答えよ。ただし、 $\tan^{-1} x$ は逆三角関数である。

(1) 関数 $\tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) - \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1)$ を微分せよ。

(2) 不定積分 $\int \frac{x}{x^4 + 1} dx$ を、 $x^2 = t$ と置換することによって求めよ。

(3) 等式 $\tan^{-1}(x^2) = \tan^{-1}(\sqrt{2}x - 1) - \tan^{-1}(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\pi}{2}$ を証明せよ。

[第 1 問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 2

第2問 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。(1) で求めた固有値 a に対して, $(A - aE)^n$ を求めよ。

(3) (1) で求めた固有値 a に対して, $(A - aE)x = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を満たすベクトル x が存在するような b, c を求めよ。

[第2問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 3

第3問 曲面 S を $S = \left\{ (x, y, z); z = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2, \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$ とし, S の単位法線ベクトルで z 成分が正のものを n とする。ベクトル場 $a(x, y, z) = (x - y)i + (x + y)j + xyk$ を考える。ただし, i, j, k は, それぞれ x, y, z 軸の正の方向に向かう単位ベクトルとする。

(1) $\text{rot } a$ および $\text{div } a$ を求めよ。

(2) 面積分 $\int_S (\text{rot } a) \cdot n \, dS$ を求めよ。

(3) 面積分 $\int_S a \cdot n \, dS$ を求めよ。

[第3問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 4

第 4 問 a, b, c を実数とする。複素変数 z に対し, $x = \operatorname{Re}(z)$ を実部, $y = \operatorname{Im}(z)$ を虚部とする。複素関数 $f(z) = (ax^2 + by^2 + cy) + i(2xy + cx)$ が複素平面全体で正則になるとする。次の問いに答えよ。

(1) a, b, c を求めよ。

(2) $f(z) = 2i$ を満たす z をすべて求めよ。

(3) $\int_{|z-2i|=2} \frac{1}{f(z) - 2i} dz$ の値を求めよ。ただし, 積分路は反時計回りに一周するものとする。

[第 4 問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--

受験番号	
------	--

数 学 2 1 その 5

第5問 $y = y(x)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 微分方程式 $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ の一般解を求めよ。
- (2) 微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1$ の一般解を求めよ。
- (3) 微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1 + 2e^x$ の解で $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ を満たす $y(x)$ を求めよ。

[第5問の解答箇所]

小 計	
-----	--

点	
---	--