平成３０年度先端技術科学教育部博士前期課程入学試験問題

物理学　又は　数学２３

（一般入試）

（物質生命システム工学専攻　化学機能創生コース）

（注意事項）

1．問題用紙および解答用紙は，係員の指示があるまで開かないこと。
2．問題用紙，解答用紙は，この表紙を除いて**問題用紙** 4 **枚（解答用紙を含む）**である。
3．解答は，解答用紙の**指定された番号の解答欄に書くこと。**指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。また，**裏面に解答したものも採点しない。**
4．**解答開始後，解答用紙の所定欄に受験番号をはっきりと記入すること。**
5．配付した用紙はすべて回収する。

受験番号

物理学	数　学

選択した科目に○を付けてください

受験番号	第　　　　　番

物　理　学　その１

第１問　黒体輻射（放射）は古典物理学では説明できず，Planck のエネルギー量子の仮説を導入して説明できる現象の一つである。この現象を，当時の古典物理学の理論をもとにして説明しようという試みが Wien や Rayleigh と Jeans などによってなされた。Wien の式：$u=\dfrac{\alpha\nu^3}{c^2}e^{-\beta\nu/T}$，Rayleigh-Jeans の式：$u=\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}k_BT$，ここで u は黒体輻射の各振動数の比強度，α および β は定数，ν は振動数，c は光速度，k_B は Boltzmann 定数，T は絶対温度である。Wien の式は ν/T が大きいときだけ，Rayleigh-Jeans の式は ν/T が小さいときだけ測定値に一致した。ここに Planck は新しい量子仮説をたて，実測とよく一致する放射公式を導いた。以下において Planck 定数を h とおく。

問１　黒体輻射を単振動を行う振動子の集まりで置き換える。Boltzmann の分布則より温度 T の熱平衡状態において，振動子がエネルギー E_n (n=0, 1, 2,・・・) の状態にある確率はどう書けるか。E_n を用いて表しなさい。
〔解答欄〕

問２　Planck は振動数 ν の振動子はエネルギーとして $nh\nu$ (n=0, 1, 2,・・・)しかとり得ないと仮定した。温度 T での振動子の平均エネルギーが $\dfrac{h\nu}{\exp(h\nu/k_BT)-1}$ となることを示しなさい。以下の公式は利用してよい。

公式 1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-nh\nu/k_BT)=\frac{\exp(h\nu/k_BT)}{\exp(h\nu/k_BT)-1}$ ，公式 2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nh\nu\exp(-nh\nu/k_BT)=\frac{h\nu\exp(h\nu/k_BT)}{[\exp(h\nu/k_BT)-1]^2}$

〔解答欄〕

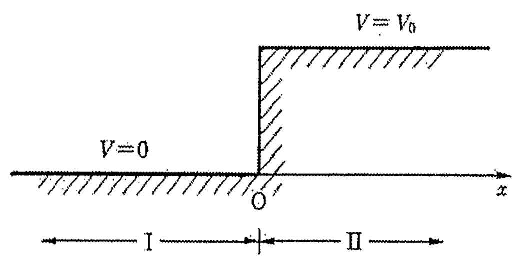
問３　Planck の放射公式は，問 2 の結果に単位体積の中に閉じ込められた振動子が定常運動をしているときの振動数状態の密度，$8\pi\dfrac{\nu^2}{c^3}$ をかけることで得られる。Planck の放射公式が $h\nu/k_BT\gg1$ のとき Wien の式に，$h\nu/k_BT\ll1$ のとき Rayleigh-Jeans の式にそれぞれ近似されることを示しなさい。
〔解答欄〕

小計	点

受験番号	第　　　　番

物　理　学　その2

第2問　右図の様に $x<0$ (領域I) でポテンシャル V が 0，$x>0$ (領域II) で V_0 となる階段ポテンシャルがある (V_0 は正の定数)。ここにエネルギー $E\ (>V_0)$ の粒子がIからIIへ入射し，$x=0$ におけるポテンシャル段差で散乱・反射される場合を考える。入射する粒子の波動関数を Ae^{ik_1x}，散乱・反射後のIにおける反射波を Be^{-ik_1x}，IIにおける透過波を Ce^{ik_2x} と表すと，領域I, IIにおける波動関数はそれぞれ $\phi_{\mathrm{I}}(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$，$\phi_{\mathrm{II}}(x)=Ce^{ik_2x}$ とかける。ここで，A，B は定数，k_1，k_2 は波数である。粒子の質量を m，ディラック定数を $\hbar$ とする。



問1　<u>領域IIにおいて</u>，$\phi_{\mathrm{II}}(x)$ が満たすシュレーディンガー方程式を書きなさい。
〔解答欄〕

問2　k_1 と k_2 を，それぞれ E と V_0 を用いて表しなさい。
〔解答欄〕

問3　$x=0$ における境界条件より，$\phi_{\mathrm{I}}(0)=\phi_{\mathrm{II}}(0)$ と $\left.\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}(x)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\phi_{\mathrm{II}}(x)}{\partial x}\right|_{x=0}$ の2つの関係式を満たす必要がある。B/A および C/A を，それぞれ k_1 と k_2 を用いて表しなさい。
〔解答欄〕

問4　次の文章の空欄に最も適切にあてはまる<u>数式</u>を記入し，続く<u>問い</u>に答えなさい。

規格化された波動関数 $\Psi(x,t)$ で表される粒子が，時刻 t に点 x を含む単位長さに見出される確率は $\boxed{}$ と表される。従って，x 軸の正方向に速さ v で進む粒子が，単位時間に原点を通過する確率は，粒子が $0<x<v$ の区間に見出される確率 $v|\Psi(x,t)|^2$ と等しく，これが単位時間に原点を通過する粒子の数である。

入射波 Ae^{ik_1x} が単位時間に入射する粒子の数は，その速さ v_1 を用いて $v_1|A|^2$ となる。同様に，反射波 Be^{ik_1x}・透過波 Ce^{ik_2x} が，単位時間に反射・透過する粒子の数は，それぞれ $v_1|B|^2$ 及び $v_2|C|^2$ とかける (v_2 は透過する粒子の速さ)。ド・ブロイの関係式より，v_1 は k_1 を用いて，$v_1=\boxed{}$ とかけるので，粒子の反射率 $R\left(\equiv\frac{v_1|B|^2}{v_1|A|^2}\right)$ と透過率 $T\left(\equiv\frac{v_2|C|^2}{v_1|A|^2}\right)$ は，それぞれ $R=\left|\frac{B}{A}\right|^2$，$T=\frac{k_2}{k_1}\left|\frac{C}{A}\right|^2$ と表される。

問　反射率 R と透過率 T を k_1，k_2 を用いて表し，確率の保存 $R+T=1$ が成り立つ事を示しなさい。
〔解答欄〕

小計	点

受験番号	第　　　　　　　　番

数　学　23　その1

第1問　$I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+2\sin 2x+\cos 2x}\,dx$ とする。変数変換 $t=\tan x$ を考えるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\cos 2x,\quad \dfrac{2t}{1+t^2}=\sin 2x$ が成り立つことを示せ。

(2) $\dfrac{dt}{dx}$ を t で表せ。

(3) I の値を求めよ。

[第1問の解答箇所]

小　計	点

受験番号	第　　　　　　　　番

数　学　23　その2

第2問　a を実数とする。与えられた関数 $f(x)$ に対して，$y(x)$ に関する微分方程式 $(*)$ $y''(x)+ay(x)=f(x)$ を考える。$y(x)=\sin x$ が微分方程式 $y''(x)+ay(x)=0$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) a を求めよ。

(2) $p(x), q(x)$ が，$p'(x)=f(x)\cos x$, $q'(x)=f(x)\sin x$ を満たすとする。
このとき，$y(x)=p(x)\sin x-q(x)\cos x$ が $(*)$ の解であることを示せ。

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ の場合に，$(*)$ の一般解を求めよ。

[第2問の解答箇所]

小　計	点