平成３０年度先端技術科学教育部博士前期課程入学試験問題

数　学　２１

（一般入試）

（知的力学システム工学専攻　機械創造システム工学コース）

（システム創生工学専攻　光システム工学コース）

（注意事項）

1．問題用紙および解答用紙は，係員の指示があるまで開かないこと。
2．問題用紙，解答用紙は，この表紙を除いて**問題用紙　5　枚（解答用紙を含む）**である。
3．解答は，解答用紙の**指定された番号の解答欄に書くこと。**指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。また，**裏面に解答したものも採点しない。**
4．**解答開始後，解答用紙の所定欄に受験番号をはっきりと記入すること。**
5．配付した用紙はすべて回収する。

受験番号	第　　　　　　　　番

数　学　21　その1

第1問　$I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+2\sin 2x+\cos 2x}\,dx$ とする。変数変換 $t=\tan x$ を考えるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\cos 2x,\quad \dfrac{2t}{1+t^2}=\sin 2x$ が成り立つことを示せ。

(2) $\dfrac{dt}{dx}$ を t で表せ。

(3) I の値を求めよ。

［第1問の解答箇所］

小　計	点

受験番号	第　　　　　　　番

数　学　21　その2

第2問　aを実数として，$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=A-E$ とする。Aが1を固有値にもつとき，次の問いに答えよ。

(1) aを求めよ。

(2) 第1成分が1である3つの列ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が，$B\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$B\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{u}_1$，$B\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{u}_2$ を満たしている。このとき，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ をそれぞれ求めよ。

(3) (2)で求めた $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を並べた行列を $P=(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ とする。$AP=P\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つように実数 b, c, d を定めよ。

[第2問の解答箇所]

小　計	点

受験番号	第　　　　　　　番

数　学　21　その3

第3問　スカラー場 $f(x,y,z)$ は $\mathrm{grad}\, f = (\cos y + y\cos x)\boldsymbol{i} + (\sin x - x\sin y)\boldsymbol{j} - 3z^2\boldsymbol{k}$ を満たす。点 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$ が曲面 $S : f(x,y,z) = \frac{\pi}{2}$ 上にあるとき，次の問いに答えよ。ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，それぞれ x, y, z 軸の正の方向に向かう単位ベクトルとする。

(1) 点Pにおける曲面 S の接平面の方程式を求めよ。

(2) $f(x,y,z)$ を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を始点とし，点 $\mathrm{Q}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -2\right)$ を終点とする曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = \frac{\pi t}{4}\boldsymbol{i} + \frac{\pi t}{4}\boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に沿っての線積分 $\int_C \mathrm{grad}\, f \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。

[第3問の解答箇所]

小　計	点

受験番号	第　　　　　　　番

数　学　21　その4

第4問　複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)(z-2)^2}$ を考える。円周 $\left|z+\dfrac{3}{2}\right|=1$ を C_1 とするとき，次の問いに答えよ。ただし，積分における積分路は，反時計回りに一周するものとする。

(1) C_1 を図示し，$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz$ を求めよ。

(2) $C_2=\{z\in\mathbb{C}\,;\,z=i-2w,\ w\in C_1\}$ とする。C_2 を図示し，$\displaystyle\int_{C_2} f(z)\,dz$ を求めよ。

(3) $C_3=\left\{z\in\mathbb{C}\,;\,z=\dfrac{1-2w}{4w+6},\ w\in C_1\right\}$ とする。C_3 を図示し，$\displaystyle\int_{C_3} f(z)\,dz$ を求めよ。

[第4問の解答箇所]

小　計	点

受験番号	第　　　　　　　　番

数　学　21　その5

第5問　aを実数とする。与えられた関数 $f(x)$ に対して，$y(x)$ に関する微分方程式 (*) $y''(x)+ay(x)=f(x)$ を考える。 $y(x)=\sin x$ が微分方程式 $y''(x)+ay(x)=0$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) aを求めよ。

(2) $p(x), q(x)$ が， $p'(x)=f(x)\cos x$, $q'(x)=f(x)\sin x$ を満たすとする。
このとき， $y(x)=p(x)\sin x-q(x)\cos x$ が (*) の解であることを示せ。

(3) $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ の場合に，(*) の一般解を求めよ。

[第5問の解答箇所]

小　計	点