平成２９年度先端技術科学教育部博士前期課程入学試験問題

数　学　２１

（一般入試）

（知的力学システム工学専攻　　機械創造システム工学コース）

（システム創生工学専攻　　光システム工学コース）

（注意事項）

1．問題用紙および解答用紙は，係員の指示があるまで開かないこと。
2．問題用紙，解答用紙は，この表紙を除いて**問題用紙　5　枚（解答用紙を含む）**である。
3．解答は，解答用紙の**指定された番号の解答欄に書くこと。**指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。また，**裏面に解答したものも採点しない。**
4．**解答開始後，解答用紙の所定欄に受験番号をはっきりと記入すること。**
5．配付した用紙はすべて回収する。

受験番号	第　　　　　　　番

数　学　21　その1

第1問　関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$ について，次の問いに答えよ。

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ。

(2) 2階偏導関数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を求めよ。

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ。

[第1問の解答箇所]

小　計	点

受験番号	第　　　　　　　番

数　学　21　その2

第2問　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ。

(2) A が定める $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $L_A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ に対して，L_A の核 $\operatorname{Ker} L_A$ の次元と像 $\operatorname{Im} L_A$ の次元を求めよ。

(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ。

[第2問の解答箇所]

小　計	点

受験番号	第　　　　　　番

数　学　21　その3

第3問　ベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=yz\boldsymbol{i}-zx\boldsymbol{j}+(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ を考える。ただし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x,y,z 軸の正の方向に向かう単位ベクトルとする。

(1) $\operatorname{div}\boldsymbol{f}=0$ となることを示せ。

(2) xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\,;\,x^2+y^2\leqq 1\}$ に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ の値を求めよ。

(3) $V=\{(x,y,z)\,;\,x^2+y^2+z^2\leqq 1,\ z\geqq 0\}$ の境界を S とし，S 上の外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。S と球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の共通部分を S_1 とするとき，面積分 $\displaystyle\int_{S_1}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ。発散定理を用いてもよい。

[第3問の解答箇所]

小　計	点

受験番号	第　　　　　　　　番

数　学　21　その4

第4問　複素平面内の円周 $|z| = 1$ を C とする。次の問いに答えよ。ただし，積分における積分路は反時計回りに一周するものとする。

(1) n を整数とするとき，次を示せ。

$$\int_C z^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1), \\ 0 & (n \neq -1). \end{cases}$$

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^4 dz$ の値を求めよ。

[第4問の解答箇所]

小 計	点

受験番号	第　　　　　　番

数　学　21　その5

第5問　$y(x)$ に関する微分方程式 (*) $xy''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=1$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) a を定数として，$y(x)=e^{ax}$ が微分方程式 $xy''(x)-(x+1)y'(x)+y(x)=0$ を満たしているとき，a の値を求めよ。

(2) (1) で求めた a に対して $y(x)=e^{ax}u(x)$ が (*) を満たしているとき，$u(x)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(3) (2) の $u(x)$ に対して $v(x)=u'(x)$ とおく。$v(x)$ が満たす微分方程式を導き，一般解 $v(x)$ を求めよ。

(4) (*) の一般解 $y(x)$ を求めよ。

[第5問の解答箇所]

小　計	点