

平成29年度先端技術科学教育部博士前期課程（第2次）入学試験問題

数 学 2 1

（一般入試）

（知的力学システム工学専攻 機械創造システム工学コース）

（注意事項）

1. 問題用紙および解答用紙は、係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題用紙、解答用紙は、この表紙を除いて問題用紙 5 枚（解答用紙を含む）である。
3. 解答は、解答用紙の指定された番号の解答欄に書くこと。指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。また、裏面に解答したものも採点しない。
4. 解答開始後、解答用紙の所定欄に受験番号をはっきりと記入すること。
5. 配付した用紙はすべて回収する。

数 学 2 1 その 1

第 1 問 以下の問いに答えよ。

(1) $u = x + y, v = x - y$ とする。 x, y を u, v の関数と考えたときのヤコビアン $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ を求めよ。

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$ とする。積分 $\iint_D (x + y)^2 e^{x-y} dx dy$ の値を求めよ。

[第 1 問の解答箇所]

数 学 2 1 その 2

第2問 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ とベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して、次の問いに答えよ。

(1) \mathbf{b} が A の固有ベクトルであることを示せ。また、 \mathbf{b} に対応する A の固有値を求めよ。

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。 $P^{-1}AP$ を求めよ。

(3) A の固有ベクトルは \mathbf{b} の定数倍に限ることを示せ。

[第2問の解答箇所]

数 学 2 1 その 3

第3問 ベクトル場 $f(x, y, z) = (x^6 + 3y)\mathbf{i} + (x^3 + y)\mathbf{j} + z^8\mathbf{k}$ を考える。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は、それぞれ x, y, z 軸の正の方向に向かう単位ベクトルとする。

- (1) $\text{rot } f$ を求めよ。
- (2) 平面 $z = 2x + 3y$ の単位法線ベクトルで z 成分が正のものを求めよ。
- (3) 円柱 $x^2 + y^2 = 1$ と平面 $z = 2x + 3y$ との交線を C とする。線積分 $\int_C [(x^6 + 3y)dx + (x^3 + y)dy + z^8 dz]$ の値を求めよ。ただし、 C の向きは z 軸の正の方から見て、反時計回りに進むとする。

[第3問の解答箇所]

数 学 2 1 その 4

第4問 複素平面上の点 $-1+i$, $2-i$, $2+i$, $-1-i$, $-1+i$ をこの順に線分で結んで一周する折れ線を C とする。複素関数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-3)}$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) $f(z)$ の極をすべて求め、各極における留数を求めよ。
- (2) 折れ線 C と $f(z)$ の極を複素平面に図示せよ。
- (3) 複素積分 $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ。

[第4問の解答箇所]

数 学 2 1 その 5

第 5 問 $y = y(x)$ に関する微分方程式について、次の問いに答えよ。

(1) $y'' + 4y = 0$ の一般解を求めよ。

(2) $y'' + 4y = 3 \cos x$ の解で、 $y(0) = 1 - \sqrt{2}$, $y'(0) = 0$ を満たすものを求めよ。

[第 5 問の解答箇所]